Wat is er Cartesiaans aan analytische meetkunde?

Steven Wepster

Departement Wiskunde
Universiteit Utrecht

mrt 2016

Outline

Wat is analytische meetkunde?

Algebra, analyse, synthese?

Descartes' Geometrie

Ondertussen, in Frankrijk. . .

Wikipedia: Analytische meetkunde

De **analytische meetkunde**, ook wel bekend als Cartesiaanse meetkunde, is de studie van meetkunde die de principes van algebra gebruikt. [. . .]
Gewoonlijk wordt het Cartesisch coördinatenstelsel toegepast om vergelijkingen voor vlakken, lijnen, krommen en cirkels te manipuleren, vaak in twee of drie, maar in principe in willekeurig veel dimensies. Sommigen zijn van mening dat de introductie van analytische meetkunde door René Descartes het begin van moderne wiskunde was.

Wikipedia: Analytische meetkunde

Belangrijke onderwerpen uit de analytische meetkunde zijn:

- Vectorruimten
- De definitie van een vlak
- Afstandproblemen
- Het inwendig product, om de hoek tussen twee vectoren te bepalen
- Het kruisproduct, om een vector loodrecht op twee bekende vectoren te berekenen
- Doorsnedeproblemen

In de oplossing van veel van deze problemen wordt lineaire algebra toegepast.
Noot van SW: de Engelstalige Wikipedia is aanzienlijk subtieler

Wikipedia: Analytische meetkunde

Geschiedenis
Analytische meetkunde wordt van oudsher toegeschreven aan René Descartes. Descartes boekte aanzienlijke vooruitgang met de methode in een essay getiteld La Géométrie, een van de drie begeleidende essays, die hij in 1637 samen met zijn *Verhandeling over de methode de rede op de juiste manier te leiden en de waarheid in de wetenschappen* te zoeken, gewoonlijk aangeduid als Verhandeling over de methode publiceerde. Dit in het Frans geschreven werk en de er aan ten grondslag liggende filosofische principes, legden het fundament voor de infinitesimaalrekening in Europa.
(Noot SW: is dit een poging om het woord "Analytisch" te duiden?)

Stammetz' Wiskundig Woordenboek 1740


VOLKOOMEN
WISKUNDIG WOORDENBOEK,
DAAR IN ALLE
KUNSTWOORDEN EN ZAAKEN,
Welke in de beſchouwende, en oeffenende Wiskunſt voorkoomen, duidelyk verklaart worden; In welk mede verſcheide zaaken de
HISTORIE DER WISKUNSTIGE WEETENSCHAPPEN
raakende vermengt zyn:
Uit de beſte en uitgeleezenſte Schriften der voornaamſte Wiskunſtenaars getrokken.
Waar by gevoegt zyn
DE SPREEKWYZEN DER BERGWERKERS,
EN ANDERE KUNSTENAARS, EN HANDTWERKERS.
Tot nut der Geleerde en Ongeleerde Liefhebbers der Wiskunſtige Weetenſchappen.
Uit de Hoogduitſche, in de Nederduitſche Taale overgezet door
JOAN LEVINUS STAMMETZ L.L.C.
En overzien door
WILLEM LA BORDUS,
Leeraar der Wiskunde te LEIDEN.
Met Plaaten.
TE LEYDEN,
By CONRAAD WISHOFF, EN GEORG JACOB WISHOFF, Conrz. Zoon. 1740.
Met Privilegie.

De HOOGERE GEOMETRIE, *Geometria ſublimior*, heet eindelyk het Deel der Geometrie, 't welk van de Krommen Linien, en de door haar voortgebragte Lighaamen handeld. Onder de Ouden Schriften behooren hiertoe *Apollonii Pergæi Conica*, *Sereni Sectiones Cylindri*, *Theodoſii Sphærica*, *Archimedis Tractatus de Spiralibus*, *Conoidibus atque Sphæroidibus*, nevens zyn Tractaat *de Quadratura Parabolæ*. De vermaarde *Mathematicus*, *Iſaac Barrow*, heeft in zynen *Lectionibus Geometricis* de hoogere Geometrie veel algemeener verhandeld, dan andere voor hem gedaan hebben. Gelyk nu egter

niet alleen de *Algebra* van *Vieta* en *Carteſius* in eenen zulken ſtand gebragt is, dat zy met veel nut in de Geometrie konde aangebragt worden, maar ook de Heer VAN LEIBNITZ zyne DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAAL-REKENING uitgevonden, deze laatſte in tegendeel *Johannes Bernoulli* door eige Uitvindingen veel vermeerderd heeft; zoo heeft de Hoogere Geometrie ook een geheel ander Aanzien gekreegen als zy eertyds gehad heeft. Die in de Hoogere Geometrie met nut wil ſtudeeren, moet alvoorens de Gemeene wel verſtaan en weeten, en zig de Algebra van *Carteſius* bekend maken, vervolgens de nieuwe van den Heer VAN LEIBNITZ voorneemen, welke beide WOLFF zoo wel in zynen AANVANGS-GRONDEN, als ook in *Elementis Analyſeos* breedvoerig verhandeld heeft. Hiernevens zal het hem veel nut geeven, indien hy *Gregorium à St. Vincentio*, *Viviani*, *de la Hire* of een ander diergelyken Auteur met Oplettendheid wil naleezen, welke na den ouden aart uit de Betrachting der Figuuren de zaak bewyſd, ten einde hy den rechten aart te Demonſtreeren afleeren, en in anderen Weetenſchappen weder te pas brengen kan. Men heeft nog tot dit uur geene *Elementa Curvarum*, in dewelken deze Materie volgens den aart of Leerwyze van de Ouden voor Aanvangers gedemonſtreert is. Egter heeft de

Stammetz: *Hogere meetkunde*

(De aanduiding "Analytische Meetkunde" is in 1750 nog niet gangbaar)

"**De Hoogere Geometrie** [...] 't welk van de Krommen Linien, en de door haar voortgebragte Lighamen handeld.
[...]
Gelyk nu egter niet alleen de Algebra van Vieta en Carthesius in eenen zulken stand gebragt is, dat zy met veel nut in de Geometrie konde aangebragt worden, maar ook de Heer van Leibnitz zyne Differentiaal- en Integraal-Rekening uitgevonden [...] zoo heeft de Hoogere Geometrie ook een geheel ander Aanzien gekreegen als zy eertyds gehad heeft."

Outline

Analyse en Algebra: Stammetz, 1740

Analysis, Oplossings- of Ontleedings-Kunst, heet de Weetenschap, welke leerd, hoe men uit eenige bekende waarheeden andere nog onbekende vinden en dus verborgene Vraagen oplossen zal. Hierin heeft men het zeer ver gebragt: Maar de middelen, door dewelke men daartoe komt, zyn de Letter ReekenKunst, de Algebra en heerlijke Differentiaal- en Integraal-Reekening van den Heer Leibnitz ofte Newton welke Uitvindings-Kunsten, by een genoomen, deze Oplossings-Kunst uitmaaken.

(Dus analyse is uitvindingskunst.)

Diderot, d'Alembert: *Encyclopédie* 1751

"**Analyse** is precies de methode om wiskundige problemen op te lossen, door ze te reduceren tot vergelijkingen. Om problemen op te lossen gebruikt de analyse de algebra, of de rekening van grootheden in het algemeen: de woorden Analyse en Algebra worden dan ook vaak als synonym gezien."

“Analytische Meetkunde” in de *Encyclopédie* 1751

Application de l’Algebre ou de l’Analyse à la Géométrie
“In de Meetkunde van Descartes vindt men voor het eerst de toepassing van de algebra op de meetkunde, evenals uitmuntende methoden om de algebra zelf te perfectioneren: dit grote genie heeft daarmee een onsterfelijke dienst bewezen aan de Wiskunde, en heeft de sleutel gegeven tot de grootste ontdekkingen die men mag hopen te maken in deze wetenschap.”

Analyse en Synthese: Pappus, ca. 300

Analyse In analyse nemen we aan wat gezocht is alsof het er al is, we zoeken naar waar het uit volgt, en dan waar dat weer uit volgt, todat we terug zijn bij iets dat we al weten.

Synthese In synthese daarentegen, beginnen we bij het laatste punt van de analyse dat we al wisten, en daarna zetten we de eerdere gevolgtrekkingen in hun natuurlijke volgorde, als precedenten, en we sinteren ze aaneen totdat we het doel bereikt hebben.

Analyse is een vindmethode, synthese geeft een mooi deductief bouwwerk

Outline

Doel van de *Géométrie* 1637

"Alle meetkundige problemen kunnen eenvoudig worden herleid tot zulke termen, dat het daarna alleen nodig is de lengte van enkele rechten te kennen, om ze [= de oplossingen] te construeren"

Doel van de *Géométrie* 1637

"Alle meetkundige problemen kunnen eenvoudig worden herleid tot zulke termen, dat het daarna alleen nodig is de lengte van enkele rechten te kennen, om ze [= de oplossingen] te construeren"

Dus: oplossingen van meetkundige problemen construeren.

"Herleiding" blijkt te zijn: vertaal het probleem in een algebraïsche vergelijking en los op.

Doel van de *Géométrie* 1637

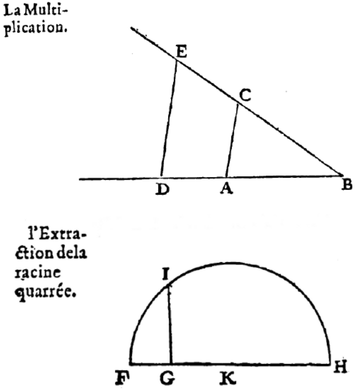
"Alle meetkundige problemen kunnen eenvoudig worden herleid tot zulke termen, dat het daarna alleen nodig is de lengte van enkele rechten te kennen, om ze [= de oplossingen] te construeren"

Dus: oplossingen van meetkundige problemen construeren.

"Herleiding" blijkt te zijn: vertaal het probleem in een algebraïsche vergelijking en los op.

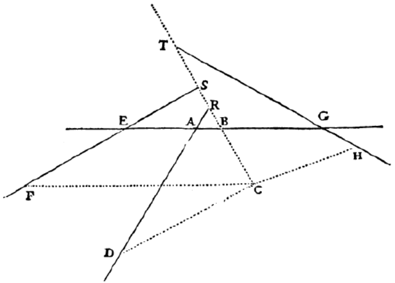
Descartes' diepere doel is om "zekere/exacte" methoden te ontwikkelen voor het oplossen van meetkundige problemen.

Canon van meetkundige constructie



De algebraïsche "oplossing" moet dus wel meetkundig geconstrueerd worden.
Na keuze van een eenheidslijnstuk kun je meetkundige constructies geven die overeenkomen met de algebraïsche operaties $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{}$.
(NB: Hogere-orde wortels blijft gedeeltelijk een probleem)

Pappusprobleem voor vier lijnen

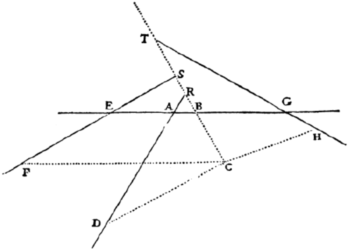


Gegeven:
vier lijnen "in positie" en vier bijbehorende hoeken,
en een verhouding, zeg r.

Concreet:
lijnen AB, AD, EF, GH.
Hoeken $\angle ABC$, $\angle ADC$, $\angle EFC$, $\angle GHC$.

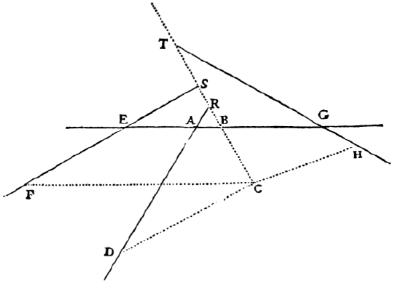
Gevraagd:
De plaats (*locus*) van alle punten C waarvoor geldt dat $(CB \cdot CF) : (CD \cdot CH) = r$.

Pappusprobleem oplossen



Descartes:
"Allereerst onderstel ik dat de zaak geklaard is, en om me te redden uit de wirwar van rechten beschouw ik een van de gegeven rechten, en een van die welke gezocht moeten worden, bijvoorbeeld AB en CB, als de belangrijkste waarop ik alle andere zal proberen te betrekken"

Pappusprobleem oplossen



Geef namen aan de bekende en onbekende grootheden.
De onbekenden zijn: $AB = x$ en $BC = y$.
Na veel gemanipuleer:

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$$

M.a.w.: bij elke keuze van $x = AB$ is $y = BC$ te construeren.
Bovendien liggen alle punten C op een kegelsnede.

Winstpunten

- Volwassen en goed bruikbare algebraïsche notatie
- Loslaten verband (meetkundige) dimensie en (algebraïsche) graad: ax kan een lijnstuk zijn
- Toelaatbaarheid: *exacte* constructies met *algebraïsche* krommen

Winstpunten

- Volwassen en goed bruikbare algebraïsche notatie
- Loslaten verband (meetkundige) dimensie en (algebraïsche) graad: ax kan een lijnstuk zijn
- Toelaatbaarheid: *exacte* constructies met *algebraïsche* krommen
- Weliswaar propageert Descartes het gebruik van algebra om meetkundige problemen te analyseren, maar strikt genomen is dit niet nieuw.

Analytische meetkunde?

- Geen "Cartesiaans coördinatenstelsel", geen coördinaten.
- Alle grootheden x, y, etc zijn en blijven (meetkundige) *lengten* en zijn dus positief. Dit leidt tot veel gevalsonderscheidingen.
- De algebra levert weliswaar een techniek voor *analyse* d.w.z. *vinding*, maar een meetkundig probleem vereist toch een *synthese*, een meetkundige constructie als oplossing.

Descartes = Analytische Meetkunde?

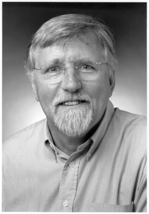
Dijksterhuis:

"[wanneer men in de Géométrie] vergeefs naar het Cartesiaansche assenstelsel zoekt en [. . .] noch van de rechte lijn, noch van een der kegelsneden de vergelijking ziet afleiden en niettemin een optredende vergelijking van den tweeden graad op juiste wijze als kegelsnede ziet interpreteeren, wanneer men dan ten slotte nog het derde Boek vrijwel geheel over de theorie der algebraische vergelijkingen ziet handelen en het nieuw gelegde verband van meetkunde en algebra evenzeer in de meetkundige oplossing van algebraische vergelijkingen ziet toepassen als in de algebraische behandeling van meetkundige problemen,

Descartes = Analytische Meetkunde?

. . . dan kan men zich moeilijk onttrekken aan den indruk, dat, wat men als analytische meetkunde heeft omschreven, in het werk van Descartes, dat als haar geboorteplaats bekend staat, deels ontbreekt, deels als volkomen bekend wordt behandeld en gebruikt en dat de titel Géométrie den sterk algebraisch getinten inhoud van het werk maar zeer volkomen dekt."

Descartes = Analytische Meetkunde?



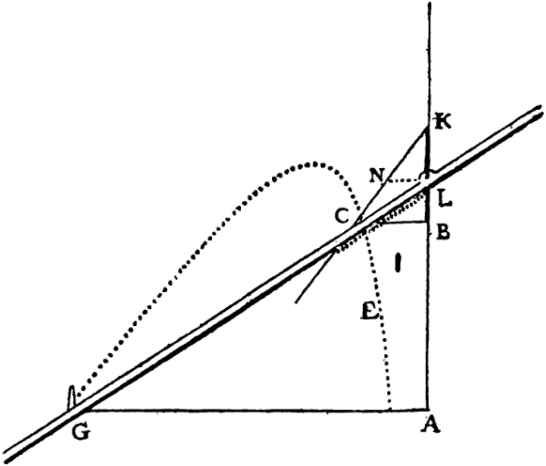
Waarom dan toch Decartes als uitvinder? Bos:
"...omdat latere lezers van het boek zich vooral door de algebraïsche technieken lieten inspireren en weinig interesse toonden in de methodologische problemen die voor Descartes zo belangrijk waren geweest."

Methodologische kwesties

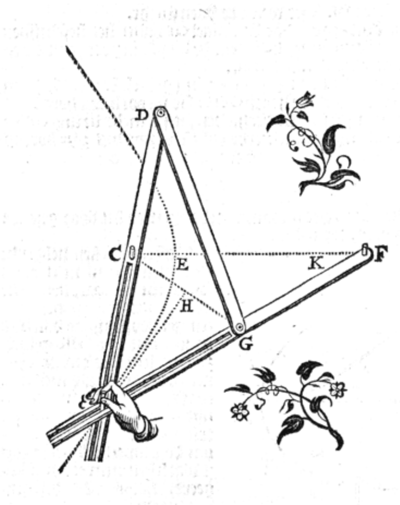
Legitimatie volgens Descartes:

- Een kromme heeft bestaansrecht in de meetkunde als je er een constructie voor hebt.
- Als constructie is toegestaan: het snijpunt nemen van twee continu bewegende krommen (of rechten), waarbij de bewegingen slechts van één enkele "basisbeweging" afhangen.
- Deze krommen blijken precies de algebraïsche krommen te zijn. Alle andere krommen zijn "mechanisch" of "transcendent".

Voorbeeld van constructie



Voorbeeld (Van Schooten)



Outline

Fermat: *ad locos planos et solidos isagoge*

Inleiding in de vlakke en ruimtelijke plaatsen

(plaatsen = loci)

postuum 1679 gepubliceerd, manuscript circuleerde in de 1630's al in Parijs.

Slechts 8 blz! Lezen!

Fermat's opening

"Dat de ouden zeer veel over plaatsen geschreven hebben is zonder twijfel. Daarvan getuigt Pappus, die aan het begin van zijn 7e boek verzekert dat Apollonius over vlakke, en Aristaios over ruimtelijke plaatsen geschreven heeft. Maar als wij ons niet vergissen, viel hun het onderzoek van plaatsen niet bepaald licht. [...]

Fermat's opening

"Dat de ouden zeer veel over plaatsen geschreven hebben is zonder twijfel. Daarvan getuigt Pappus, die aan het begin van zijn 7e boek verzekert dat Apollonius over vlakke, en Aristaios over ruimtelijke plaatsen geschreven heeft. Maar als wij ons niet vergissen, viel hun het onderzoek van plaatsen niet bepaald licht. [. . .]
Wij onderwerpen daarom deze wetenschap aan een eigen en bijzondere analyse, opdat er voortaan een algemene weg tot de plaatsen openstaat."

De hoofdzaak: *Locus* en *onbepaalde vergelijking*

"Wanneer in een uiteindelijke vergelijking twee onbekende grootheden voorkomen, hebben we een plaats [locus], en het eindpunt van een van hen beschrijft een rechte of kromme lijn.

De hoofdzaak: *Locus* en *onbepaalde vergelijking*

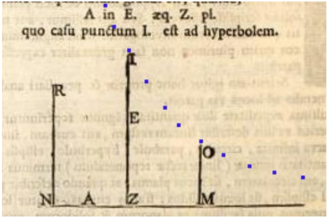
"Wanneer in een uiteindelijke vergelijking twee onbekende grootheden voorkomen, hebben we een plaats [locus], en het eindpunt van een van hen beschrijft een rechte of kromme lijn.

[. . .]

Vergelijkingen kunnen gemakkelijk aangevat worden wanneer wij de twee onbekende grootheden onder een vaste hoek, die we meestal recht nemen, samenbrengen, met het eindpunt van één van hen in positie gegeven. Indien geen van de onbekende grootheden een kwadraat te boven gaat, is de plaats vlak of ruimtelijk" d.w.z. een lijn, cirkel of kegelsnede.

Voorbeeld: "A in E aeq. Z plano" ofwel $xy = a^2$

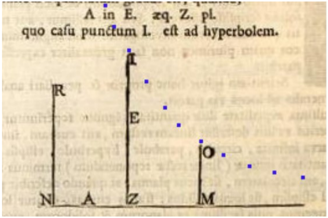
Fermat en Viète gebruiken A voor x, E voor y, medeklinkers voor bekenden.



Eerste variabele A ligt langs NZ
Tweede variabele E langs ZI
Kies een punt M op NZ
Trek MO evenwijdig aan ZI
Kies O zo dat rechthoek NMO oppervlak Z^2 heeft
Trek NR evenwijdig aan ZI

Voorbeeld: "A in E aeq. Z plano" ofwel $xy = a^2$

Fermat en Viète gebruiken A voor x, E voor y, medeklinkers voor bekenden.



Eerste variabele A ligt langs NZ
Tweede variabele E langs ZI
Kies een punt M op NZ
Trek MO evenwijdig aan ZI
Kies O zo dat rechthoek NMO oppervlak Z^2 heeft
Trek NR evenwijdig aan ZI
Teken de hyperbool door O met NR, NZ als asymptoten
Deze gaat door I, aangezien rechthoek NZI gelijk is aan NMO

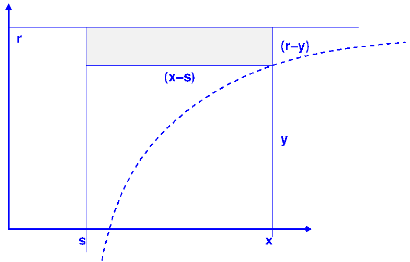
Herleiden van andere vormen

Fermat laat zien hoe je sommige andere vergelijkingen tot dit type $xy = a^2$ herleidt, bijv. $rx + sy = d^2 + xy$ herschrijf je als

$$rx + sy - xy = d^2;$$

en dit kun je ontbinden als

$$(x - s)(r - y) = d^2 - rs$$



Kernpunten bij Fermat

- onbepaalde vergelijking $\rightarrow$ meetkundige plaats, kromme
- een-assig, meestal orthogonaal
- systematische, leesbare introductie t/m krommen van graad 2

Fermat en Descartes: overeenkomsten

- een-assig “co”ordinatenstelsel
- verband algebra – meetkunde; locusproblemen
- aansluiten bij klassieken (Pappus) en Viète
- beide noemen Pappus-probleem
- transformaties, reducties
- beide overschatten de macht van algebra

Fermat en Descartes: verschillen

- F benadrukt relatie vergelijkingen $\leftrightarrow$ krommen
- D wil exacte methoden voor het oplossen van meetkundeproblemen
- F: prettig leesbaar; D: stuurt lezer het bos in
- D hervormt notatie
- D publiceert, F niet

Ik vind bij Fermat duidelijker dan bij Descartes zichtbaar dat de analytische meetkunde voortkomt uit de combinatie van klassieke (locus)problemen met Viète-algebra in twee variabelen.

Verschil toen en nu

- geen "Cartesische coördinaten" ($\rightarrow$ Cramer 1750)
- variabelen stelden (positieve) *lijnstukken* voor
- algebra als *vindmiddel*: constructie bleef nodig
- locusproblemen vs. krommen bestuderen via vergelijkingen
- poolcoördinaten e.d.
- meetkunde van $3 \leq$ dim.

Waar of niet waar?

Position and form, which were formerly supposed to be in the exclusive possession of geometers, were reduced by Descartes to submit to the rules of arithmetic by means of that ingenious scaffolding of co-ordinate axes which he made the basis of his operations.

J.C. Maxwell, 1871

E I N D E.

- D. Diderot en J. le Rond d'Alembert (eds.) *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des mtiers, par une Société de Gens de lettres*, Parijs 1751 (online: http://encyclopedie.uchicago.edu/)
- H. J. M. Bos, *Descartes en het begin van de Analytische Meetkunde*, CWI Syllabus 25, Vakantiecursus 1989.
- C. F. Boyer, *History of Analytic Geometry*, New York 1956.
- G. Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève 1750.
- Hk. de Vries, *De "Geometrie" van Descartes, en de "Isagoge" van Fermat*, Historische Studiën, Deel I, Hst. VII, Groningen 1926.
- D. E. Smith en M. L. Latham (eds), *The Geometry of René Descartes: with a facsimile of the first edition*, 1925 (Dover reprint 1954).
- W. W. Wilhelm (ed), *Meetkunde / René Descartes: Vertaald en ingeleid door Wim W. Wilhelm*, Delft 2009.
- E. J. Dijksterhuis, *Descartes als wiskundige*, Euclides 9 (1932), 56–76.

- J. G. Dopper, *A life of learning in Leiden: the mathematician Frans van Schooten (1615–1660)*, proefschrift, Utrecht 2014.
- L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum: liber secundus, continens Theoriam Linearum curvarum, una cum appendice de Superficiebus*, Lausanne 1748 (facsimile Brussel 1967).
- P. de Fermat, *Ad locos planos et solidos isagoge*, in: Varia Opera, Toulouse 1679, 1–8; Engelse vertaling in [16, 389–396].
- H. Wieleitner (vert.), *Einführung in die ebenen und körperlichen Örter von Pierre de Fermat (um 1636)*, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Leipzig 1923
- M. S. Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat (1601–1665)*, Princeton 1973
- Pappus Alexandrinus, A. Jones (ed.) *Book 7 of the Collection*, Sources in the history of mathematics and the physical sciences 8, New York 1986 (2 delen)
- J. G. Rutgers, *Inleiding tot de analytische meetkunde: eerste deel*, Groningen 1928 (tweede druk)

- D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, 1929 (Dover reprint 1959).
- J. L. Stammetz, *Volkoomen wiskundig woordenboek, daar in alle kunstwoorden en zaaken [...] duidelyk verklaart worden*, Leiden 1740.