Differentiaalvergelijkingen (d.v.)

Voorbeeld: $\boxed{y' = a - by}$ met a, b constanten > 0
en $y = y(t)$

Komt uit farmacie: y = concentratie van medicijn
y' = verandering vd concentratie
m.b.t. tijd.

opvallende zaken

deze is 1e orde (en lineair)

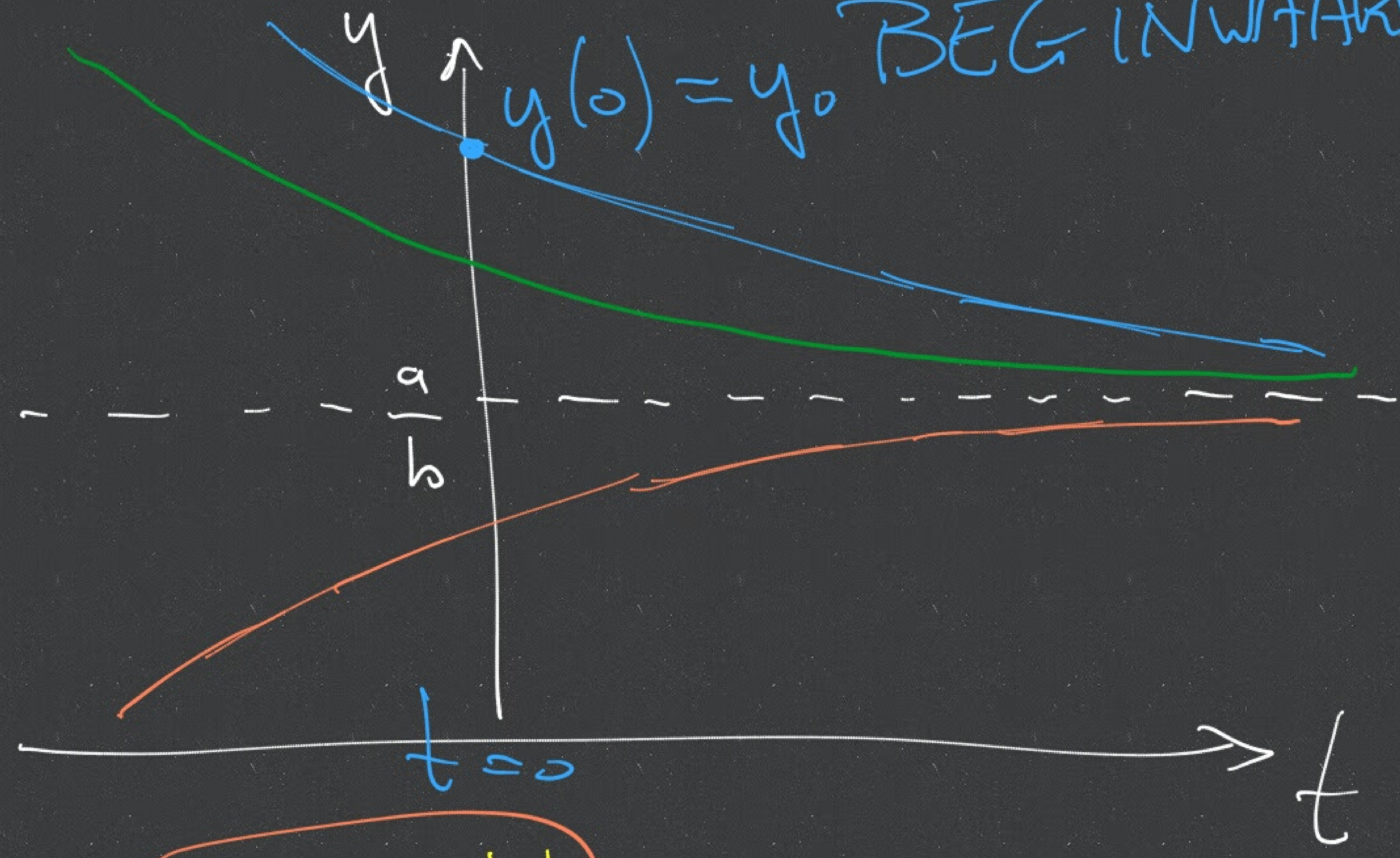
als $y > 0$ dan ....?

als $y = \frac{a}{b}$ dan $a - by = 0$, dus ook $y' = 0$ dus evenwicht
(geen verandering)

als $y > \frac{a}{b}$ dan $a - by < 0$, dus $y' < 0$, dus y daalt

als $y < \frac{a}{b}$ dan $a - by > 0$, dus $y' > 0$, dus y stijgt

BEGINWAARDE op $t=0$: $y(0) = a/b + \lambda$



D.V: $y' = a - by$

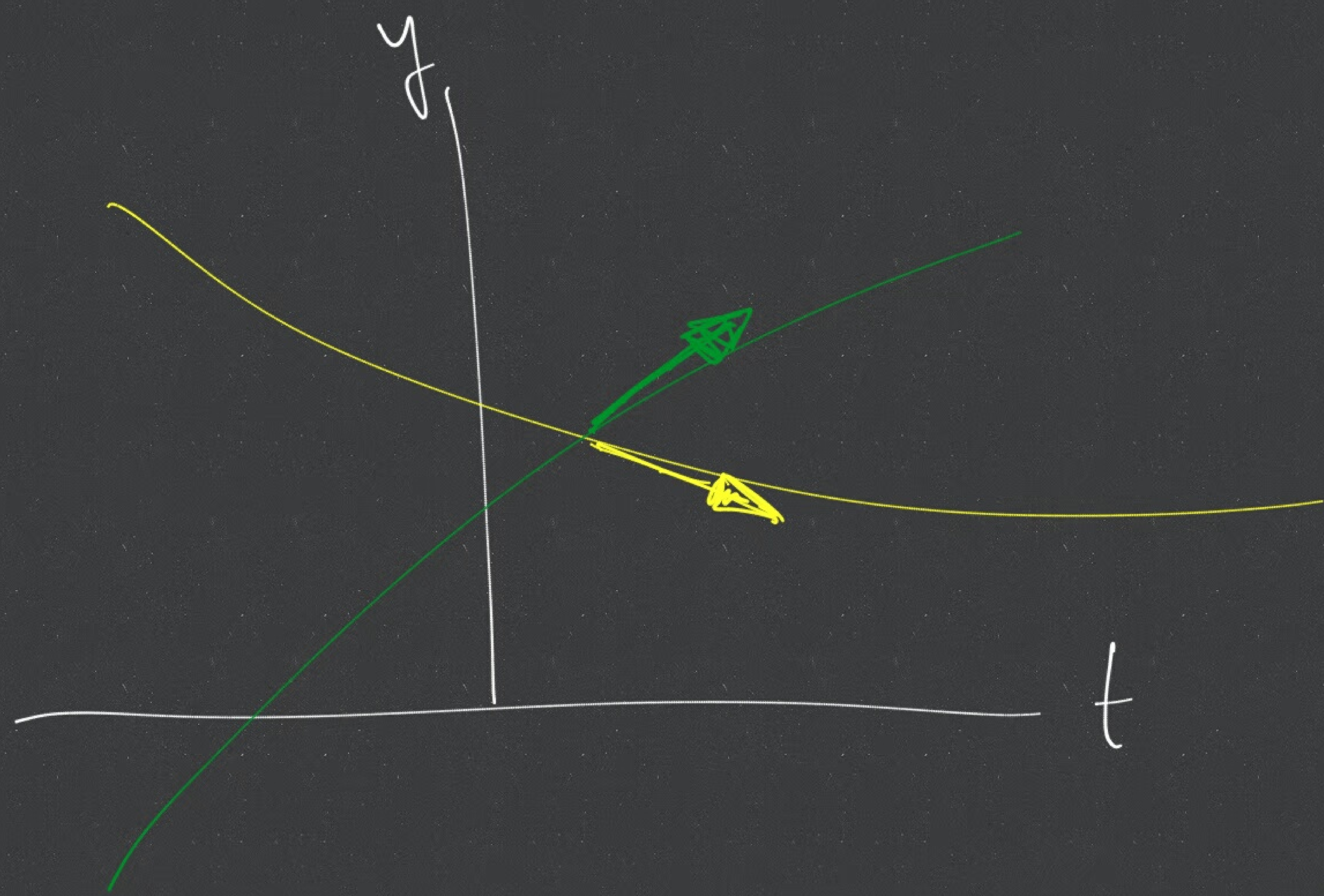
Check dat $y = \frac{a}{b} + \lambda e^{-bt}$ een oplossing is voor alle λ

dwz: controleer dat deze functie, als je hem invult in de D.V., "zorgt dat het klopt"

$$y' = \boxed{-b\lambda e^{-bt}}$$

$$a - by = a - (a + b\lambda e^{-bt}) = \boxed{-b\lambda e^{-bt}}$$

Nog nodig om precies één oplossing aan te wijzen is een <u>beginwaarde</u> dwz de concentratie op een of ander tijdstip bijv. $t=0$.

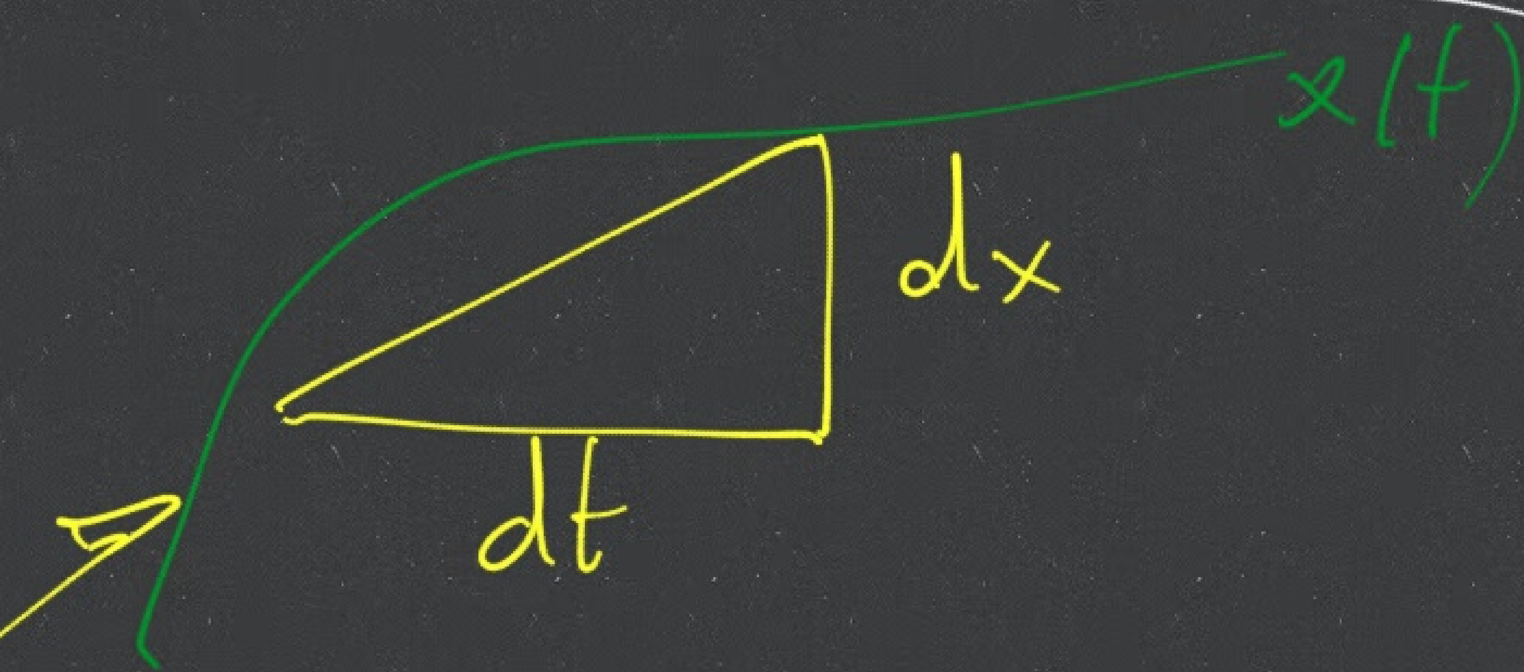


Dit kunnen nooit
twee oplossingen
van dezelfde d.v.
zijn.
Immers, je zou hier
twee verschillende waarden
voor y' hebben.

Voor het oplossen van een n-de orde d.v. moet je i.h.a. n keer integreren, dus dan heb je n integratie-constanten die je kunt uitrekenen met n beginwaarden.

<u>Oplossen</u> scheiden van d.v.

zoz.



Notatiekwestie:

$x = x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = x' = \dot{x} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} \quad x'' \quad \ddot{x}$$

Leibniz ↑ Lagrange ↑ Newton

VWO: $\log = {}^{10}\log$, $\ln = {}^{e}\log$

IK: $\log = {}^{e}\log$

VB 1 radioactief verval

$$\dot{x} = kx \qquad (k<0)$$

andere notatie

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Scheiden:

$$\frac{dx}{x} = k\,dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int k\,dt \qquad \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\log x \cancel{+ c_1} = kt + c_2$$

laat maar weg

$$x = e^{kt+c_3} = e^{c_4}e^{kt}$$

$$x = c_5 e^{kt}$$

VB2: Newtons afkoelwet

$$\frac{dT}{dt} = k(T-T_B)$$

T_B const. buitentemp.

k const.

T temp. t tijd

Scheiden:

$$\frac{dT}{T-T_B} = k\,dt$$

Integreren

$$\int \frac{dT}{T-T_B} = \int k\,dt$$

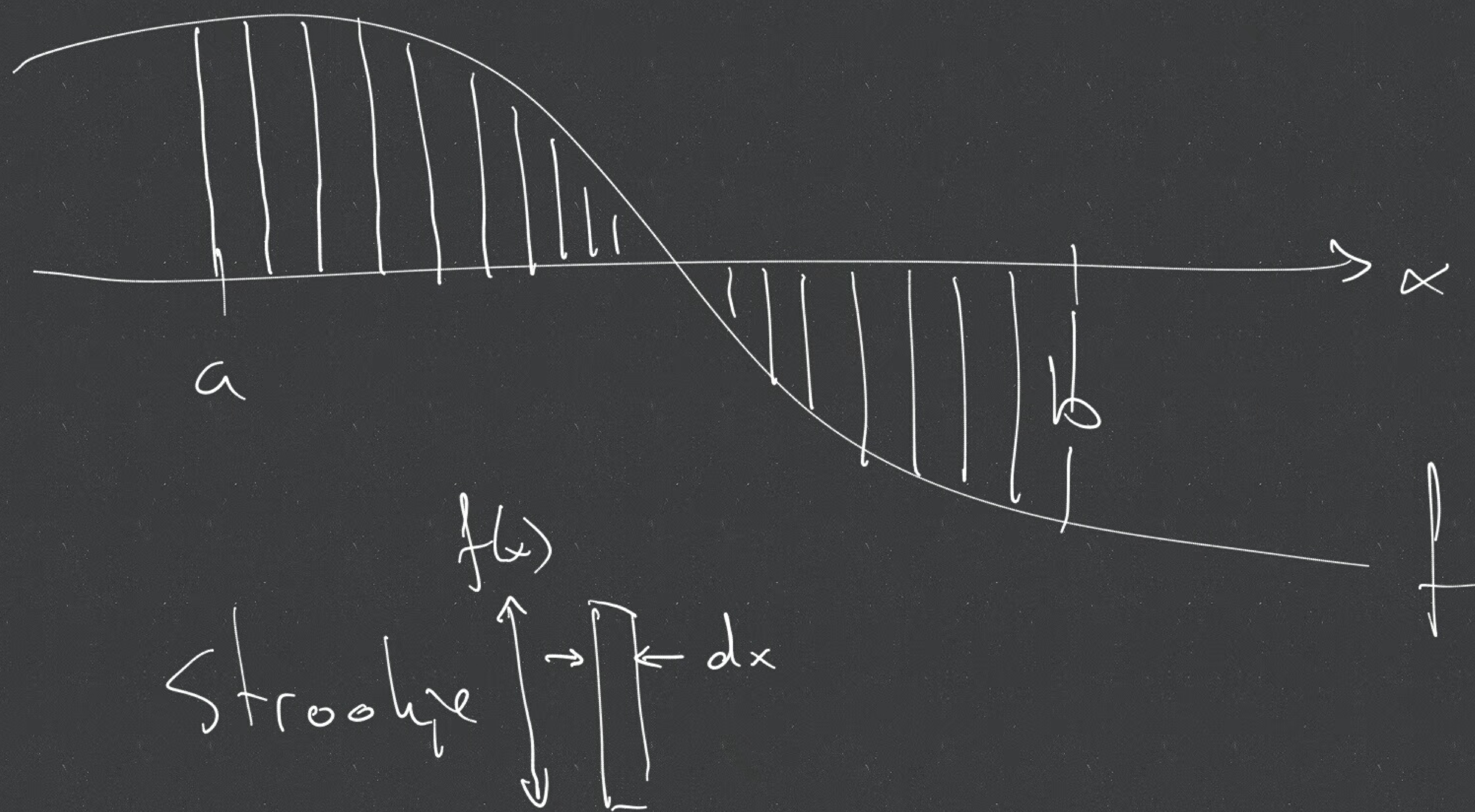
$$\log(T-T_B) = kt + c$$

$$T - T_B = c e^{kt}$$

Alg. oplossing:

$$T(t) = T_B + c e^{kt}$$

Integreren is som van strookjes met hoogte $f(x)$ en breedte dx



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

precies hetzelfde

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

$$\int_a^b f(q)\,dq$$