Rotatie

rotatievector

<u>VB</u>: gegeven punt P met plaatsvector $\bar r = \bar r(t)$

en P beweegt als $\begin{cases} \bar v = 2\hat i \times \bar r \\ \bar r(0) = \hat i + 3\hat j \end{cases}$ met $\bar v = \dfrac{d\bar r}{dt}$

Dit is dus een d.v. met beginwaarde.

Op twee manieren oplossen: ① inzicht ② werk.

①. Inzicht

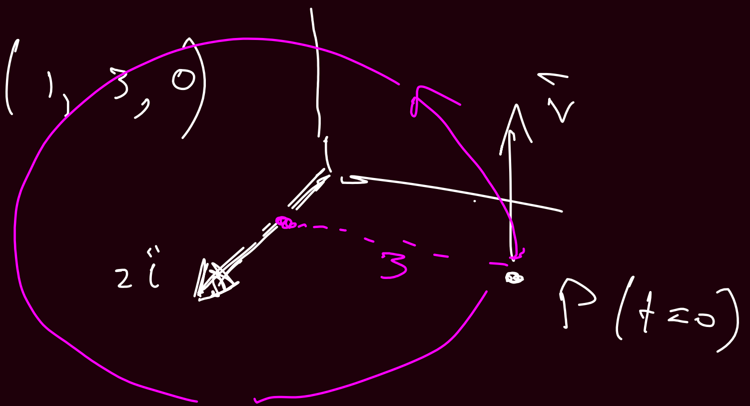
denkend aan dinsdag: neem $\bar\Omega = 2\hat i$

hoeksnelheid $|\bar\Omega| = 2$, rotatie-as x-as

beginwaarde: op tijd $t=0$ zit P in $(1, 3, 0)$

Conclusie:

$$\bar r(t) = \hat i + 3\left(\cos(2t)\,\hat j + \sin(2t)\,\hat k\right)$$



(2) Werken:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{r}}{dt} = 2\hat{i} \times \bar{r} \\ \bar{r}(0) = \hat{i} + 3\hat{j} \end{cases}$$

uitschrijven in coordinaten:

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$2\hat{i} \times \bar{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ 2y \end{pmatrix}$$

Geeft 3 gewone d.v.

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -2z \\ \dot{z} = 2y \end{cases}$$

$\dot{x} = 0 \rightarrow$ dwz er is geen snelheid in $\hat{i}$-richting

$\dot{y} = -2z \rightarrow$ diff naar t: $\ddot{y} = -2\dot{z}$

$\ddot{y} = -4y$

opl. $y = C\cos(2t + \varphi)$

C, φ int. const.

$\dot{z} = 2y$ invullen:

$\dot{z} = 2C\cos(2t + \varphi)$

$z = C\sin(2t + \varphi)$

Beginw: $z(0) = C\sin\varphi = 0$ neem $\varphi = 0$

Als $t = 0$ dan $y(0) = C\cos\varphi = 3$

als $\varphi = 0$ dan $C = 3$

Conclusie:

$x = \text{const} = 1$, $y = 3\cos 2t$, $z = 3\sin 2t$

Curven en parametriseren

Eerst wat anders

Caracal = cursusgeval!
alsjeblieft!!

Krommen en parametriseren

VB Twee oppervlakken

$$(*) \begin{cases} x^2 + y + z = 2 \\ xy + z = 1 \end{cases}$$

Hoop je: intersectie is een kromme.

Laten we deze (*) kromme parametriseren $\longrightarrow \bar{r}(t)$

parameter

$$(*) \begin{cases} z = 2 - x^2 - y \\ z = 1 - xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 1 - y \\ z = 1 - y \end{cases}$$

z elimineren:

$$2 - x^2 - y = 1 - xy$$

$$1 + xy - y = x^2$$

$$y(x-1) = x^2 - 1$$

$$y = \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1 \quad \text{mits } x \neq 1$$

Kies $x = t$

dan $y = t + 1$

$z = 1 - t(t+1)$

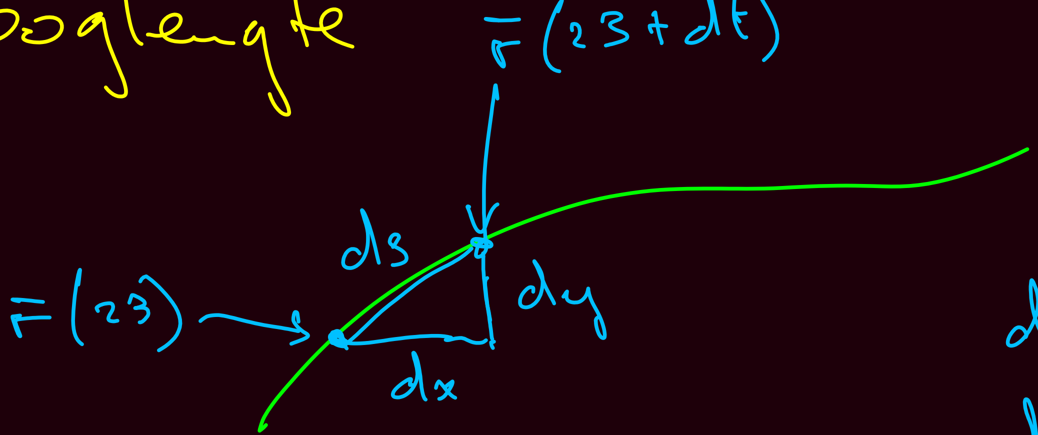
Conclusie $\bar{r}(t) = t\hat{i} + (t+1)\hat{j} + (1 - t(t+1))\hat{k}$

Wat als $x=1$? dan $y=2$, $z=-1$ gaat goed??

Oh Wacht! Bij $x=1$ heb je eigenlijk voldaan aan allebei je vergelijking dmv $z=1-y$

dus $\vec{r}(t) = \hat{i} + t\hat{j} + (1-t)\hat{k}$ is ook een parametrisering van een ander stuk "kromme"

Booglengte



kromme $\bar r(t)$

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

$$ds = |d\bar r(t)|$$

Lengte vd kromme $= s = \int_a^b ds = \int_a^b \left|\frac{d\bar r}{dt}\right| dt$.

Cirkel: Parametriseer $\bar r(t) = \cos t\,\hat i + \sin t\,\hat j$

$$\frac{d\bar r}{dt} = -\sin t\,\hat i + \cos t\,\hat j$$

$$\left|\frac{d\bar r}{dt}\right| = 1$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} 1\,dt = t\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi}$$