Toets a.s. ma stof t/m do 7 dec (Jacobiaan)
(tot en met)

Onegenlijke integralen
- f niet begrensd
- D niet begrensd.

Aanpak: ① $f \geq 0$ op heel D, probeer dan gewoon herhaald integreren. Divergent? $\longrightarrow$ $\iint_D f \, dA$ bestaat niet

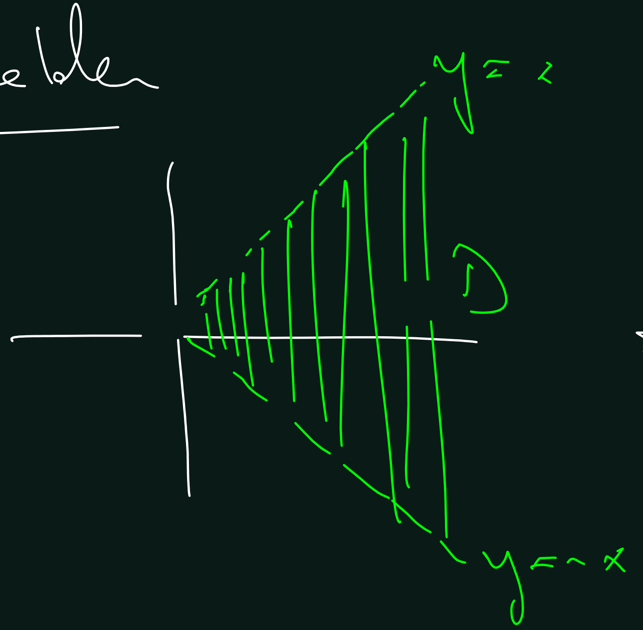
Convergent? $\longrightarrow$ dan wel.

② $f \leq 0$ op heel D, zelfde verhaal

③ Andere gevallen: vraag hulp.

Voorbeelden

A_1



$$\iint_D e^{-x^2}\, d(x,y) \qquad (\text{Convergent})$$

$$= \int_0^\infty \int_{-x}^{+x} e^{-x^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^\infty \left[y e^{-x^2} \right]_{y=-x}^{y=+x} dx$$

$$= \int_0^\infty 2x e^{-x^2}\, dx$$

Subs $u = x^2$

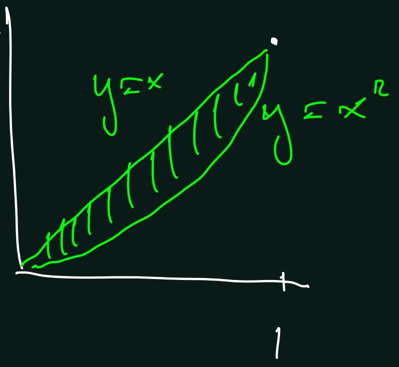
$du = 2x\, dx$

$x \in (0,\infty) \to u \in (0,\infty)$

$$= \int_0^\infty e^{-u}\, du = -e^{-u} \Big|_{u=0}^{u=\infty}$$

$$= +1.$$

B. 1 ~



$$\iint_D \frac{1}{xy}\, d(x,y) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{1}{xy}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\log y}{x}\Big|_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\log x}{x} - \frac{2\log x}{x}\, dx$$

$$= \int_0^1 -\frac{\log x}{x}\, dx$$

$$= -\log^2 x \Big|_{x=0}^{x=1} = 0 + \lim_{x\to 0} \log^2 x = +\infty$$

Dus $\iint_D \frac{d(x,y)}{xy}$ is divergent

NB intermezzo:

$$\underbrace{\int \int_a^b f(x)\, g(y)\, dy}\, dx$$

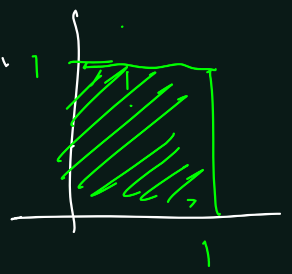
Grenzen a, b zijn niet van x afh.

int over y, dus f(x) is voor deze int. een constante

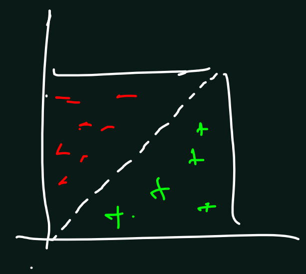
$$= \int f(x) \underbrace{\int g(y)\, dy}\, dx$$

↳ deze int. is een constante voor de buitenste

$$= \int g(y)\, dy \int f(x)\, dx$$

C. 

$$\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3}$$



NB: ① f voldoet niet aan de eis $f \geq 0$ of $f \leq 0$.

② $$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} -\frac{1}{y^2} = -\infty$$

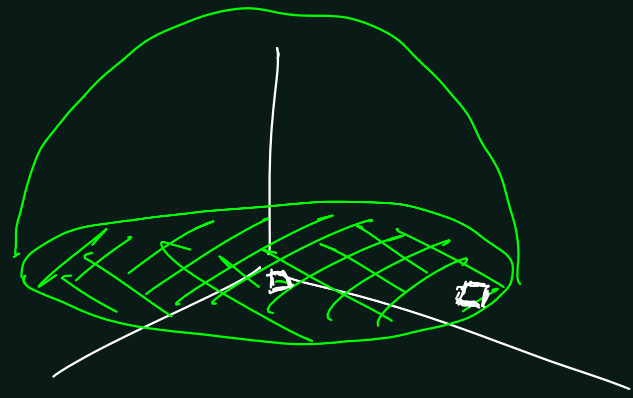
③ $$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx\, dy = -\frac{1}{2} \quad \text{(zelf narekenen)}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy\, dx = +\frac{1}{2} \quad \text{(idem)}$$

Verdacht!!

Vandaar: gevaar!

Conclusie: afblijven!



Coordinatensubstitutie

VB: bolvolume straal R

D: $x^2+y^2 \leq R^2$

f: $f(x,y) = \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$

Halve bol heeft Vol $\iint_D \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\, d(x,y)$

Kies coordinaten die bij het probleem passen:

$x^2+y^2 = r^2$ of $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ cylinder coord.

In cylinder coord: D is het gebied $0 \leq r \leq R$

en $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$z = \sqrt{R^2-r^2}$

$$\iint_D f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2-r^2} \cdot r \; d\theta\, dr$$

NB Jacobiaan

$$|D\Psi| \text{ of } \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$$

In ons geval:

$$x = r\cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$y = r\sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Dus

$$\iint_D \sqrt{R^2-r^2}\, r \, d(r,\theta) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2-r^2}\, r \, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\, r\, dr$$

$$= \pi \int_0^{R^2} \sqrt{u}\, du \qquad u = R^2 - r^2, \quad du = -2r\,dr$$

$$= \pi \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{u=0}^{u=R^2}$$

$$= \frac{2\pi}{3} R^3$$

dus de hele bol heeft vol. $\frac{4\pi R^3}{3}$