(1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy \quad \text{dus} \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy}_{=\text{ in elkaarschuive}}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2}\, r\, d(r,\vartheta) \overset{\text{poolcoord.}\ \leftarrow}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) \overset{\text{van herhaald naar dubbel}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

$\|$ van dubbel naar herhaald

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r e^{-r^2}\,dr\,d\vartheta \underset{\text{uitelkaar}}{=} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} r e^{-r^2}\,dr = 2\pi\left(-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right)_{r=0}^{r=\infty}$$

$$= \pi$$

Conclusie: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$

Belangrijk voor statistiek
foutenleer

Tripel integralen $\iiint dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f d(x,y,z)$ ②

Werkt precies hetzelfde als dubbel. incl. Jacobiaan bij ~~st~~ subs.

Bijv Jacobiaan als je bolcoord. gebruikt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{rechthoek} \\ \text{cylinder} \\ \text{bol} \end{array}\right\} \text{coordinaten.}$$

$$\Psi(R,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix}$$

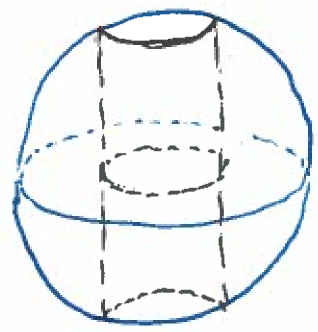
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)} = \underline{\underline{R^2\sin\varphi}} \leftarrow \text{CHECK (1x, 2x, 3x, daarna gewoon onthouden)}$$

$$\downarrow$$

$$\text{Jacobiaan} = \det(D\Psi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}$$

Voorbeeld.

Bol met straal 2r
met een gat met straal r
Wat is het volume van
wat je overhebt?



- rechthoek ↯
- bol
- cylinder } ☺
- anders

Vraag: welke coord? We doen eerst bol, daarna cylinder. (misschien)

Bolcoord. Vol is $\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} R^2 \sin\varphi \, dR \, d\varphi \, d\theta$

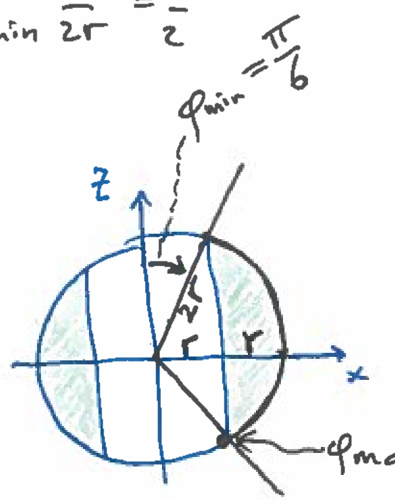
Vol = $\iiint_{\text{voorwerp}} dx\,dy\,dz$

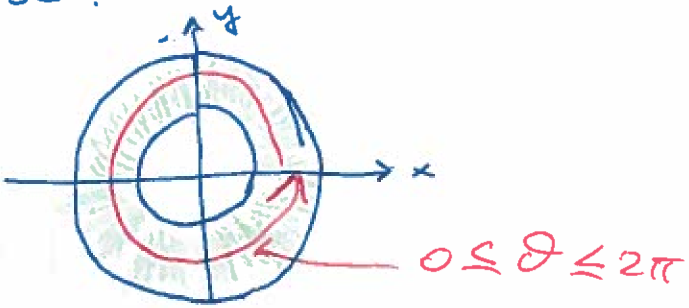
- functievoorschrift
- Jacobiaan
- geboortedatum
- aantal punten vd opg.

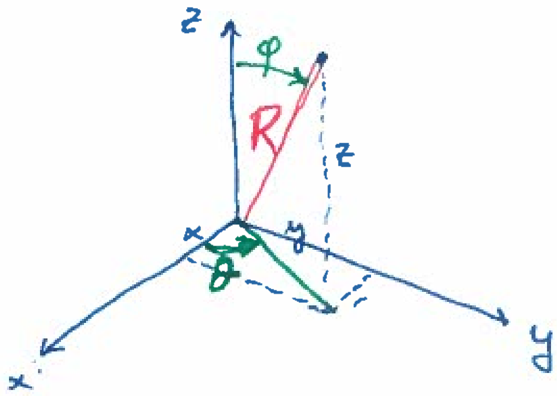
$$\le R \le \text{zoz.}$$
$$\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6}$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$

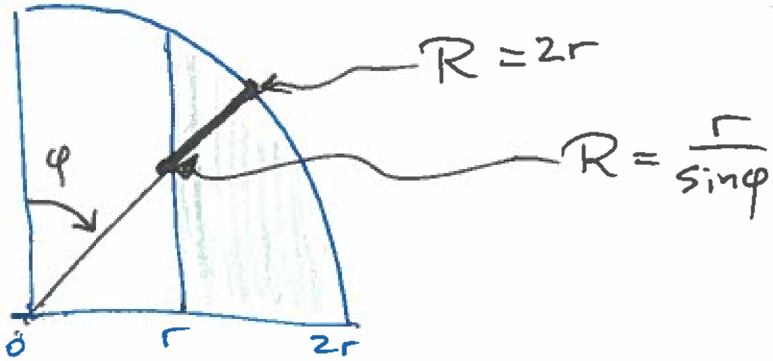
ZELF.

$\sin \varphi_{min} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$









dus $\frac{r}{\sin\varphi} \leq R \leq 2r$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_{r/\sin\varphi}^{2r} R^2 \sin\varphi \, dR \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{5\pi/6} \int_{r/\sin\varphi}^{2r} R^2 \sin\varphi \, dR \, d\varphi}_{\text{kun je niet verder opsplitsen}}$$

etc. eerst over R integreren
dan over φ.

Merk op: Uitreken van Volume op 3 verschillende manieren

I

$$\iint_V \underbrace{f(r,\theta)}\ \underbrace{r}_{\text{Jacobiaan}}\ d(r,\theta)$$

$$f(r,\theta) = \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$\text{Volume} = \iint_{\text{grondvlak}} \underbrace{z}_{\text{hoogte}}\, dA$$

Integreer hoogte ~~over~~ over opp. elementen dA
$dxdy$
$r\,dr\,d\theta$

II

$$\text{Vol} = \iiint dV$$
$$= \iint \underbrace{\left[\int dz\right]}\, dx\, dy.$$

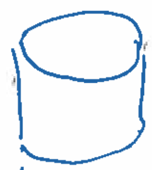
Integreer over volume-elementen $(dx\,dy\,dz)$ of dV

III

$$2\pi \int_0^R f(r,\theta)\, r\, dr$$

$\downarrow$

Integreer ~~...~~ het opp van ringen



met ~~&~~ const hoogte over r

Vectorvelden

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

of

$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

beeld en ~~zelfde~~ origineel hebben zelfde dimensie

VB: wind,
magnetis~~me~~che veld.
zwaartekracht veld
elekrisch veld.

→ Stroomlijnen.

Scalarvelden

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (evt: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

VB: druk, temp, sneeuwhoogte