

Tentamen Wiskundige Technieken 1

Ma 6 nov 2017 13:30–16:30

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- **TIJD: let op, de tweede helft van de opgaven kost meer tijd dan de eerste helft!**
- Totaal 50 punten.

1. We nemen de vectoren $\mathbf{p} = -2\hat{\mathbf{i}} + a\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{i}} + -3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$
 - a. Voor welke a zijn de vectoren \mathbf{p} en \mathbf{q} orthogonaal? 3 pt.
 - b. Neem nu $a = 0$ en ga na of de vector $2\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ in het opspannel van \mathbf{p} en \mathbf{q} ligt. 3 pt.
2. Geef de complex geconjugeerde van $\frac{1}{-2i^{50} + i^{11}}$ in de vorm $a + bi$. 4 pt.
3. In het complexe vlak noemen we \mathcal{B} het lijnstuk dat wordt beschreven door de getallen $z = te^{i\pi/3}$ met $0 \leq t \leq 2$. Bepaal het beeld van \mathcal{B} onder de afbeelding (functie) $w = z^2 + 1$. Geef formule en ook een schets met zowel \mathcal{B} als het beeld van \mathcal{B} . 4 pt.
4. We herinneren aan de definities $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ en $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$. Bepaal twee verschillende uitdrukkingen voor $\tanh' x$; eentje met \tanh als enige functie van x , en eentje met \cosh als enige functie van x . 4 pt.
5. Toon aan of geef een tegenvoorbeeld: $u^3 - u + 1 > 0$ voor alle $u \geq 0$. 4 pt.
6. Voor $x \neq 0$ definiëren we $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$. Ga na of, en zo ja hoe, $f(0)$ gedefinieerd kan worden opdat f continu is in 0. Gebruik in je argumentatie een Taylorveelterm van \sin . 4 pt.

7. Evalueer de volgende integralen:

a. $\int \cos^4 x \, dx$ 4 pt.

b. $\int_{-1}^0 2x \log(1 + x^4) \, dx$ 4 pt.

8. Los het volgende beginwaardeprobleem op:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 3y^2 - 6y, \\ y(0) &= 1.\end{aligned}$$

9. Debye-functies komen voor in de thermodynamica en worden gedefinieerd als

4 pt.

$$y_n(x) = \frac{n}{x^n} \int_0^x \frac{t^n}{e^t - 1} \, dt,$$

waarin n een natuurlijk getal. Laat zien dat y_n voldoet aan de d.v.:

$$xy' + ny = \frac{nx}{e^x - 1}.$$

10. Onderzoek de functie $f(x) = \frac{1 - \log x}{x}$ en maak een nette schets van de grafiek.

8 pt.

ALSJEBLIEFT CURSUSEVALUATIE INVULLEN:

