Proeftentamen Functies en Reeksen

oktober 2019, 3 uur

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, de naam van je **practicumleider** (Dusan Joksimovic, Dominik Engl, Christiaan van den Brink) en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 5 opgaven tellen even zwaar.

Succes !

10 pt totaal **Opgave 1** We beschouwen de functie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$\varphi(u, v) = (u^2 + v^2, u^2 - v^2).$$

3 pt (a) Beargumenteer dat φ totaal differentieerbaar is en bepaal $D\varphi(u, v)$ voor alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

We beschouwen nu een C^2-functie $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$.

4 pt (b) Laat zien dat de functie $g : (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v))$ totaal differentieerbaar is op $\mathbb{R}^2$ en druk de partiële afgeleiden $\partial g/\partial u$ en $\partial g/\partial v$ uit in de partiële afgeleiden $\partial f/\partial x$ en $\partial f/\partial y$.

3 pt (c) Toon aan dat

$$\frac{\partial^2 g(u, v)}{\partial u \partial v} = 4uv \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(u, v)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(u, v)) \right).$$

10 pt totaal **Opgave 2** We beschouwen een continu differentieerbare functie $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ zo dat $|f|$ en $|f'|$ oneigenlijk integreerbaar zijn over $[0, \infty[$ en zo dat $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

5 pt (a) Toon aan dat de integraal in

$$g(t) = t \int_0^\infty f(x) \cos(tx)\, dx$$

absoluut convergent is voor alle $t \in \mathbb{R}$ en dat de zo gedefinieerde functie g continu is op $\mathbb{R}$.

5 pt (b) Toon aan dat voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt:

$$g(t) = -\int_0^\infty f'(x) \sin(tx)\, dx.$$

ZOZ

10 pt totaal **Opgave 3** De volgende twee onderdelen (a) en (b) zijn onafhankelijk van elkaar.

5 pt (a) We beschouwen de functies $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(n \geq 1)$, gedefinieerd door

$$f_n(x) = \int_0^{x+1/n} \cos^2(x+t)\, dt.$$

Toon aan dat de rij (f_n) op $\mathbb{R}$ uniform convergeert en bepaal de limietfunctie f.

5 pt (b) Toon aan dat door

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}$$

een continue functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt.

10 pt totaal **Opgave 4** Bepaal voor elk van de volgende machtreeksen de verzameling van alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor hij convergeert. Vergeet daarbij niet het gedrag op de convergentiecirkel te onderzoeken.

5 pt (a) $\sum_{n\geq 1} \frac{nz^n}{2^n}$;

5 pt (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{(1+i)^n z^n}{n^2}$.

10 pt totaal **Opgave 5** Voor $0 \leq a \leq \pi$ beschouwen we de 2π-periodieke functie $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die op $[-\pi, \pi]$ gedefinieerd is door

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad |x| \leq a, \\ 0 & \text{als} \quad |x| > a. \end{cases}$$

4 pt (a) Bepaal de Fourier-coëfficiënten $\mathcal{F}(f_a)_k$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

3 pt (b) Bewijs dat

$$\pi a = a^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin ka)^2}{k^2}.$$

3 pt (c) Bewijs dat

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$