Samenvatting

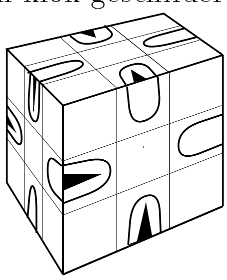
De lezing ging voornamelijk in op twee onderwerpen:

Ten eerste dat bij een legale bewerking het totale tijdsverschil niet verandert (modulo drie) tussen de klokstanden op de hoekkubussen van mijn kubus en de standen op een vaste 'Greenwich kubus'. De truc was dat het volstaat om dit voor één enkele draaiing aan te tonen, en dat men dan een hulpkubus kan ontwerpen die speciaal aan die draaiing is aangepast. En wel zo dat de klokstanden op de hulpkubus bij die specifieke draaiing niet veranderen. Men ziet het verschil tussen mijn kubus en de Greenwich kubus dan als opgebouwd uit het verschil tussen mijn kubus en de hulpkubus, plus het verschil tussen de hulpkubus en de Greenwich kubus.

Het tweede onderwerp betrof commutatoren van bijna commuterende routines. Als men bij een routine π (in de praktijk een enkele draaiing) een routine σ vindt zo dat er zeer weinig deelkubusjes/plakkertjes door zowel π als σ bewogen worden, dan beweegt de commutator hoogstens 'drie maal zeer weinig', dus nog steeds weinig, deelkubusjes/plakkertjes. Dat is precies wat je nodig hebt om het karwij af te maken als de kubus bijna op orde is.

Opgaven met oplossingen

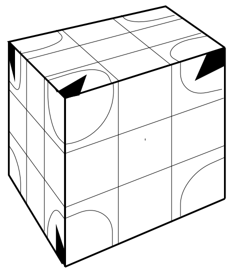
Opgave 1 Beschouw een ongekleurde Rubik kubus met op ieder van de twaalf rib-kubussen een klok geschilderd als in de figuur.



Iedere klok heeft slechts één wijzer en die ene wijzer kent slechts twee standen, beide dwars op de ribbe. Laat zien dat als iemand achter zijn rug één laag een kwart slag draait, en dan de kubus weer terug geeft, dat dan het totale ogenschijnlijke tijdsverschil tussen de klokstanden ervoor en erna even is. En als hij achter zijn rug de hele kubus een kwart slag draait?

Oplossing 1 Men kan dit doen met tekens van permutaties, maar leuker lijkt het om weer een hulpkubus te ontwerpen die aan de genoemde draaiing is aangepast. Dus zo dat de klokstanden op de hulpkubus bij die specifieke draaiing niet veranderen. Als de hele kubus gedraaid wordt kan dit ontwerpen van een hulpkubus nog steeds. Als alternatief kan men aantonen dat elke draaiing van de hele kubus kan worden nagebootst door een opeenvolging van kwart slagen van lagen, waarbij nu natuurlijk ook middenlagen mogen draaien. (We houden het assenkruis dus niet langer in een vaste stand.)

Opgave 2 Nu dan met acht klokken, elke klok op een hoek-kubus. Iedere wijzer kent nu drie standen.



Wat kunnen we zeggen van het totale ogenschijnlijke tijdsverschil als iemand achter zijn rug de hele kubus draait en dan weer terug geeft?

Oplossing 2 Het is een drievoud. Men kan dit doen door weer een hulpkubus te ontwerpen die aan de genoemde draaiing is aangepast. Dus zo dat de klokstanden op de hulpkubus bij die specifieke draaiing niet veranderen. Als alternatief kan men aantonen dat elke draaiing van de hele kubus kan worden nagebootst door een opeenvolging van kwart slagen van lagen, waarbij nu natuurlijk ook middenlagen mogen draaien.

Opgave 3 Net als T, B, L hebben we natuurlijk nog R, V en A (van *rechts*, *voor* en *achter*). Laat nog K de kwart slag van de hele kubus om de vertikale as zijn waarbij de rechterlaag naar voren komt. Dan is de routine appelschillen (voor rechtshandigen) als volgt gedefinieerd. (We lezen nog steeds van links naar rechts.)

$$\text{appelschillen} = RKRKRKRTR^{-1}K^{-1}R^{-1}K^{-1}R^{-1}K^{-1}R^{-1}T^{-1}$$

Bij het appelschillen gaan alle deelkubussen terug naar hun oude stand, behalve de drie rib-kubussen voor-boven, rechts-boven en voor-rechts, die onderling verwisseld worden.

Hoe maak je nu met het principe van naamswijziging een routine die alle deelkubussen terugbrengt naar hun oude stand, behalve de drie rib-kubussen voor-boven, rechts-boven en voor-links?

Oplossing 3 Eerst V, dan appelschillen, dan V^{-1}. Merk overigens op dat 'appelschillen' een uitzondering op de regel is: Deze commutatator beweegt weinig, maar dit wordt niet verklaard door een kleine doorsnijding van dragers van permutaties. Kijk ook eens wat

$$RKRKRKRT^2R^{-1}K^{-1}R^{-1}K^{-1}R^{-1}K^{-1}R^{-1}T^{-2}$$

doet.

Opgave 4 Ga na waar de plakkertjes precies naar toe gaan bij het appelschillen. Dit patroon is niet symmetrisch met betrekking tot draaiing om de lange as die de voor-boven-rechts hoek verbindt met de achter-onder-links hoek. Is dat toeval, of is dat bij elke routine zo die 'alle deelkubussen terug brengt naar hun oude stand, behalve de drie rib-kubussen voor-boven, rechts-boven en voor-rechts, die onderling verwisseld worden.'? Wat doet de commutator van appelschillen met een draaiing om die lange as?

Oplossing 4 Dat is toeval, want een meer symmetrisch gedrag is toegelaten door al onze invarianten. Je kunt inderdaad een symmetrischer permutatie krijgen door het appelschillen te laten volgen door het omflippen van twee ribkubussen. Zulk omflippen van twee ribkubussen is trouwens net wat wordt gedaan door de commutator van appelschillen met een draaiing om de genoemde lange as.

Opgave 5 Bij de gewone gekleurde Rubik kubus is het niet te zien als een midden-kubus gedraaid is ten opzichte van zijn oorspronkelijke stand. Men kan de puzzel dus nog wat moeilijker maken door op alle zes de middenkubussen nog een figuur te tekenen dat niet rotatie-symmetrisch is. Laten we zeggen weer een klok met één wijzer. Stel dat we behalve de kleuren ook de klokstanden voorschrijven. Wat is de conditie waaraan het voorschrift moet voldoen wil de opdracht uitvoerbaar zijn zonder slopen? Als je dan eerst de zes klokken goed zet, dan kun je vervolgens met de oude routines de plakkertjes op hun plaats gaan brengen, zonder de klokstanden te verprutsen. Waarom is dat?

Oplossing 5 De conditie is dat het totale midden-kubus-klok-verschil even (respectievelijk oneven) is als de permutatie van de hoekkubussen even (respectievelijk oneven) is. Dus een enkele kwartslag van een midden-kubus kan niet, twee kunnen wel. Hebben we de zes midden-kubus-klokken goed gezet, dan kunnen we het karwij afmaken met commutatoren, en die doen niets met de zes midden-kubus-klokken.

Opgave 6 Met zes draaiingen kan men de voor-rechts-boven kubus getold terug op zijn plaats zetten, zonder dat de andere deelkubussen in de bovenlaag netto verstoord worden. Bijvoorbeeld zo: $R^{-1}BRVBV^{-1}$. Kan het korter? (Niet dat ik weet.) Als we een draaiing van een van de drie middenlagen als slechts één draaiing tellen, hoeveel draaiingen heb je dan nodig om de voor-boven kubus geflipt terug op zijn plaats zetten, zonder dat de andere deelkubussen in de bovenlaag netto verstoord worden? Hint: Het doet er toe welke middenlaag je benut.

Oplossing 6 Het laatste kan door de voorlaag driemaal en de horizontale middenlaag tweemaal te draaien.